TEORÍA DE LA PROBABILIDAD

Teorema de Bernoulli (1713)

El teorema de Bernoulli es el primer teorema límite de la teoría de la probabilidad; en su forma general se le conoce como ***Ley Débil de los Grandes Números***.

Se trata de un resultado de Cálculo Combinatorio, especificamente es un resultado acerca del desarrollo de un binomio $(r+s)^n$, donde r, s y son números reales positivos.

Se tiene:

$$(r+s)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} r^k s^{n-k}$$

Para $k \in \{0,1,2,\ldots,n\}$, definamos $t_k = \binom{n}{k} r^k s^{n-k}$.

Para $k \in \{1,2,\ldots,n\}$, se tiene

$$\frac{t_{k-1}}{t_k} = \frac{\binom{n}{k-1} r^{k-1} s^{n-k+1}}{\binom{n}{k} r^k s^{n-k}} = \frac{ks}{(n-k+1)r}$$

De manera que $t_{k-1} \leq t_k$ si y sólo si $ks \leq nr - kr + r$, es decir, $k \leq (n+1)\frac{r}{r+s}$.

Para $k \in \{0,1,\ldots,n-1\}$, se tiene

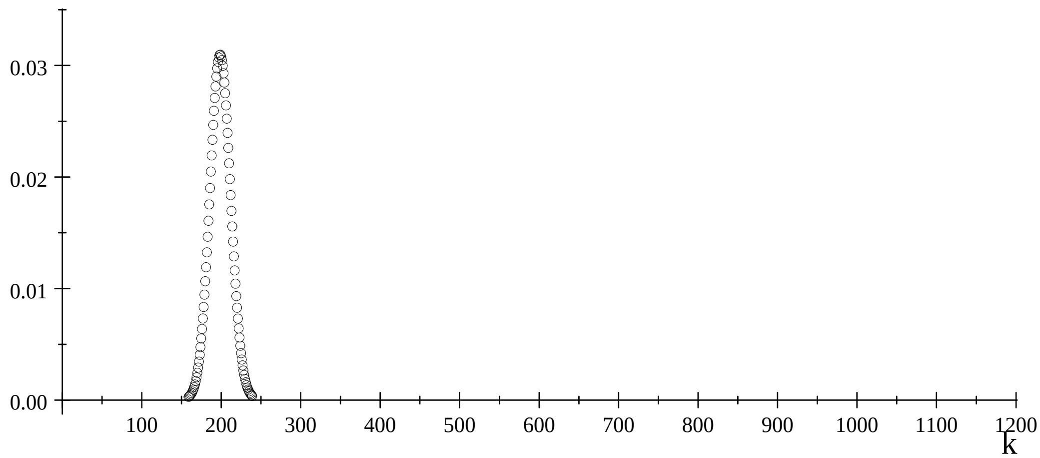
$$\frac{t_k}{t_{k+1}} = \frac{\binom{n}{k} r^k s^{n-k}}{\binom{n}{k+1} r^{k+1} s^{n-k+1}} = \frac{(k+1)s}{(n-k)r}$$

De manera que $t_k \geq t_{k+1}$ si y sólo si $ks + s \geq nr - kr$, es decir:

$$k \geq n\frac{r}{r+s} - \frac{s}{r+s} = (n+1)\frac{r}{r+s} - 1.$$

Así que, los términos $t_k = \binom{n}{k} r^k s^k$ tienen la propiedad de que crecen con k hasta alcanzar su máximo valor cuando $(n+1)\frac{r}{r+s} - 1 \leq k \leq (n+1)\frac{r}{r+s}$ (si $(n+1)\frac{r}{r+s}$ es un número entero, el valor máximo se alcanza en dos valores de k), después de lo cual decrecen con k.

En la siguiente gráfica se muestran los valores de $\frac{t_k}{(r+s)^n}$ para el binomio $(1+5)^{1200}$.



$n = 1200$, $r = 1$, $s = 5$

El teorema de Bernoulli establece que, para cualquier número $\varepsilon > 0$, por pequeño que sea, se tiene:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(r+s)^n} \sum_{\left\{k\in\mathbb{N}:k\in\left[n\frac{r}{r+s}-n\varepsilon,n\frac{r}{r+s}+n\varepsilon\right]\right\}} t_k = 1$$

Así que lo que dice el resultado es que, la suma de los términos que se encuentran alrededor del término máximo (en un intervalo de radio $n\varepsilon$) es prácticamente igual a la suma de todos los términos del desarrollo del binomio.

En términos de probabilidades, el teorema dice lo siguiente:

Supongamos que realizamos n observaciones (independientes) de un determinado fenómeno aleatorio y denotemos por X_n al número de veces en que se observa que ocurre un determinado evento A, cuya probabilidad de ocurrencia es igual a p. La frecuencia relativa con la que ocurre el evento A es entonces $\frac{X_n}{n}$. El teorema de Bernoulli asegura que, dado cualquier número $\varepsilon > 0$, por pequeño que sea, a medida que n crece, la probabilidad de que se cumpla la relación $\left|\frac{X_n}{n} - p\right| \leq \varepsilon$ se acerca a 1. En símbolos:

$$\lim_{n\to\infty} P\left[\left|\frac{X_n}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right] = 1$$

El ejemplo de la gráfica corresponde al lanzamiento de un dado 1200 veces consecutivas y el evento A consiste en la obtención del número 6. En este caso, el término máximo del desarrollo del binomio $(1+5)^{1200}$ se obtiene cuando $k = 200$. Tomando $\varepsilon = \frac{1}{30}$ se tiene $n\varepsilon = 40$ y:

$$P\left[\left|\frac{X_n}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right] = \sum_{k=160}^{240} \binom{1200}{k} \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{1200-k} \approx 0.99828$$

Proposición 1. *Sean $p \in [0,1]$, $n \in \mathbb{N}$ y $k \in \{0,1,2,\dots,n\}$; entonces, los términos $t_k = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ crecen con k hasta alcanzar su máximo valor cuando $np+p-1 \leq k \leq np+p$, después de lo cual decrecen con k.*

Demostración

Para $k \in \{0,\dots,n\}$, sea $t_k = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$. Se tiene entonces, para $k \in \{1,\dots,n\}$:

$$\frac{t_{k-1}}{t_k} = \frac{\binom{n}{k-1}p^{k-1}q^{n-k+1}}{\binom{n}{k}p^k q^{n-k}} = \frac{kq}{(n-k+1)p}$$

De manera que $t_{k-1} \leq t_k$ si y sólo si $kq \leq np - kp + p$, es decir, $k \leq np + p$.

Para $k \in \{0,\dots,n-1\}$, se tiene:

$$\frac{t_k}{t_{k+1}} = \frac{\binom{n}{k}p^k q^{n-k}}{\binom{n}{k+1}p^{k+1}q^{n-k+1}} = \frac{(k+1)q}{(n-k)p}$$

De manera que $t_k \geq t_{k+1}$ si y sólo si $kq + q \geq np - kp$, es decir:

$$k \geq np - q = np + p - 1.$$

∎

Teorema 1 (**Teorema de Bernoulli**). *Sea $\mathcal{E}$ un experimento aleatorio y A un evento relativo a ese experimento, de probabilidad igual a p. Consideremos un nuevo experimento aleatorio consistente en la repetición indefinida del experimento $\mathcal{E}$, de tal manera que cada repetición es independiente de las otras. Sea X_n el número de veces que ocurre el evento A en las primeras n repeticiones del experimento y ε un número positivo arbitrario, entonces:*

$$\text{lím}_{n\to\infty} P\left[\left|\tfrac{X_n}{n} - p\right| > \varepsilon\right] = 0$$

Demostración

Sabemos que X_n tiene distribución binomial con parámetros n y p; es decir, si $j \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$, entonces $P[X = j] = \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j}$.

Para $j \in \{0, \dots, n\}$, sea $t_j = \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j}$. De acuerdo con la proposición 1, los términos t_j crecen con j hasta alcanzar su máximo valor cuando $np + p - 1 \le j \le np + p$, después de lo cual decrecen con j.

Además, la sucesión $s_j = \frac{t_j}{t_{j-1}}$, con $j \in \{1, \dots, n\}$, es decreciente. En efecto, para $j \in \{2, \dots, n\}$, se tiene:

$$s_j = \tfrac{t_j}{t_{j-1}} = \tfrac{(n-j+1)p}{jq} < \tfrac{(n-j+2)p}{(j-1)q} = \tfrac{t_{j-1}}{t_{j-2}} = s_{j-1}$$

Sea $j \ge k > (n+1)p$ y $r = \frac{t_k}{t_{k-1}} = \frac{(n-k+1)p}{kq}$, entonces:

$$0 < r < 1 \text{ y } t_j = \tfrac{t_j}{t_{j-1}} t_{j-1} \le \tfrac{t_k}{t_{k-1}} t_{j-1} = \tfrac{(n-k+1)p}{kq} t_{j-1} = r t_{j-1}$$

Así que:

$$t_j \le r t_{j-1} \le r^2 t_{j-2} \le \cdots \le r^{j-k} t_k$$

Por lo tanto:

$$P[X_n \ge k] = \textstyle\sum_{j=k}^{n} t_j \le t_k \sum_{j=k}^{n} r^{j-k} < \tfrac{1}{1-r} t_k = \tfrac{kq}{k-(n+1)p} t_k$$

Sea m el único número entero tal que $(n+1)p - 1 < m \le (n+1)p$, entonces, como $t_m > t_{m+1} > \cdots > t_{k-1} > t_k$, se tiene:

$$1 > t_m + t_{m+1} + \cdots + t_{k-1} > (k-m)t_k \ge [k - (n+1)p]\, t_k$$

Así que $t_k < \frac{1}{k-(n+1)p}$. Por lo tanto:

$$P[X_n \ge k] < \tfrac{kq}{[k-(n+1)p]^2}$$

Dada $\varepsilon > 0$ y $n \in \mathbb{N}$ tal que $n\varepsilon > 1$, sea k_0 el único entero tal que:

$$np + n\varepsilon < k_0 \leq np + n\varepsilon + 1$$

Entonces:

$P\left[\frac{X_n}{n} - p > \varepsilon\right] = P\left[X_n > np + n\varepsilon\right] = P\left[X_n \geq k_0\right] < \frac{k_0 q}{[k_0 - (n+1)p]^2}$

$\leq \frac{(np+n\varepsilon+1)q}{[np+n\varepsilon-(n+1)p]^2} = \frac{(np+n\varepsilon+1)q}{[n\varepsilon-p]^2} = \frac{n(p+\varepsilon)q+q}{n^2\varepsilon^2-2n\varepsilon p+p^2}$

Por lo tanto:

$$\text{lím}_{n\to\infty} P\left[\frac{X_n}{n} - p > \varepsilon\right] \leq \text{lím}_{n\to\infty} \frac{n(p+\varepsilon)q+q}{n^2\varepsilon^2-2n\varepsilon p+p^2} = 0$$

Sea Y_n el número de veces que no ocurre el evento A en las primeras n repeticiones del experimento, se tiene entonces $Y_n = n - X_n$, así que:

$\text{lím}_{n\to\infty} P\left[\frac{X_n}{n} - p < -\varepsilon\right] = \text{lím}_{n\to\infty} P\left[q - \frac{Y_n}{n} < -\varepsilon\right] = \text{lím}_{n\to\infty} P\left[\frac{Y_n}{n} - q > \varepsilon\right] = 0$

Por lo tanto:

$$\text{lím}_{n\to\infty} P\left[\left|\frac{X_n}{n} - p\right| > \varepsilon\right] = 0$$

$\blacksquare$

El teorema de Bernoulli no asegura que, en una sucesión infinita de repeticiones del experimento $\mathcal{E}$, la frecuencia relativa de ocurrencia de A, en las primeras n repeticiones del experimento, tenga un límite igual a p, lo cual demostraría la validez de la interpretación frecuencial de la probabilidad. Lo que afirma es que, dada cualquier $\varepsilon > 0$, la **probabilidad** del evento $\left[\left|\frac{X_n}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right]$ se acerca a 1 a medida que n crece. Es decir, establece una relación en términos de probabilidades.

Para aclarar el resultado, supongamos que el experimento $\mathcal{E}$ consiste en el lanzamiento de un dado y que A representa la obtención de un 6 al realizar el experimento. La probabilidad $p = \frac{1}{6}$ significa entonces, en este caso, que se tiene 1 caso favorable y 5 desfavorables para la ocurrencia de A.

En n repeticiones del experimento hay un total de 6^n posibles resultados, todos ellos con la misma probabilidad, de manera que si llamamos A_n (resp. B_n) al número de posibles resultados que favorecen la ocurrencia del evento $\left[\left|\frac{X_n}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right]$ (resp. $\left[\left|\frac{X_n}{n} - p\right| > \varepsilon\right]$) en las n repeticiones del experimento, se tiene:

$$A_n + B_n = 6^n$$

$$P\left[\left|\frac{X_n}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right] = \frac{A_n}{6^n} \qquad P\left[\left|\frac{X_n}{n} - p\right| > \varepsilon\right] = \frac{B_n}{6^n}$$

Así que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A_n}{B_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{P\left[\left|\frac{X_n}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right]}{P\left[\left|\frac{X_n}{n} - p\right| > \varepsilon\right]} = \infty$$

Por lo tanto, en este caso, una formulación equivalente del teorema de Bernoulli consiste en decir que, a medida que n crece, el número de posibles resultados que favorecen la ocurrencia del evento $\left[\left|\frac{X_n}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right]$ se hace mucho más grande que el número de posibles resultados que favorecen la ocurrencia del evento $\left[\left|\frac{X_n}{n} - p\right| > \varepsilon\right]$, de tal manera que su cociente tiende a ∞, pero no que el evento $\left[\left|\frac{X_n}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right]$ ocurra con seguridad.

De manera también equivalente, se puede decir que para determinar si el evento $B = \left[\left|\frac{X_n}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right]$ ocurre, se pueden colocar A_n bolas blancas y B_n bolas negras en una urna, después de lo cual se selecciona una bola al azar. Si ésta resulta blanca, entonces B ocurre. Evidentemente, el que A_n sea muchísimo más grande que B_n (para n grande) no significa que al seleccionar una bola al azar de la urna, ésta sea necesariamente blanca. Tampoco significa que si se repite muchas veces el experimento aleatorio consistente en seleccionar, al azar y con reemplazo, una bola de esa urna, casi siempre se obtendrá una bola blanca. El que esto ocurriera sería un resultado experimental que reforzaría una interpretación frecuencial de la probabilidad, pero no una prueba de la validez del teorema de Bernoulli.

De hecho, **el teorema de Bernoulli, siendo un resultado teórico dentro del modelo de probabilidad que hemos definido, no requiere de ninguna verificación experimental, es válido como cualquier resultado que se demuestre en cualquier teoría matemática**.